Міністерство освіти і науки України
Український політехнічний технікум

Конспект лекцій
з предмету «вища математика»
для студентів спеціальності
5.05050302 «Технологія обробки матеріалів на верстатах і автоматичних лініях»

укладач Гладун О.Є.

м. Кривий Ріг

<u>Лінійна алгебра</u>

При розв'язуванні різних задач математики, техніки, економіки, особливо лінійних систем рівнянь, лінійних диференціальних рівнянь та їх систем, застосовують матриці, визначники та n-мірні вектори.

<u>Матрицею</u> називають прямокутну таблицю елементів, яка має n рядків та m стовпців. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, D, \ldots$ Наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – елементи матриць, у яких індекс i показує номер рядка, а індекс j – стовпця.

Якщо число рядків і стовпців матриці співпадає ($m = n$), то така матриця називається квадратною. Так, матриця B, у якої $n = m = 2$, є квадратною.

<u>Добутком двох матриць</u> A (з n рядків та m стовпчиків) та B (з m рядків та l стовпчиків) називають матрицю з n рядків та l стовпчиків, у якої в i-му рядку на j-му місці стоїть сума $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Наприклад, для матриць розмірності 2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

<u>Визначником</u> називають число, яке ставиться у відповідність квадратній матриці. Визначник (детермінант) позначають символами $\Delta, \Delta B, \det B$. Так, наприклад, для матриці B визначник будемо позначати

$$\Delta = \Delta B = \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Порядком визначника називають його розмірність $m = n$.

<u>Визначником 2-го порядку</u> є число, яке дорівнює різниці добутків елементів головної (a_{11}, a_{22}) та побічної (a_{12}, a_{21}) діагоналей. Так,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначники вищих порядків $(n = m > 2)$ обчислюються іншим способом. Для його пояснення введемо поняття мінора та алгебраїчного доповнення визначника.

<u>Мінором</u> M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають визначник $n-1$-го порядку, який одержують з визначника n-го порядку при викреслюванні i-го рядка та j-го стовпчика.

<u>Алгебраїчним доповненням</u> A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають мінор M_{ij}, який береться зі знаком плюс, якщо сума індексів $i + j$ є парним числом і зі знаком мінус, якщо ця сума є непарним числом. Тобто, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Визначником n-го порядку називають число, яке, наприклад, записують у вигляді

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \qquad (1)$$

Вираз (1) називають розкладом визначника n-го порядку по елементах i-го рядка.

Для визначника 3-го порядку формула (1) має вигляд $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$. Так, наприклад, розклад визначника 3-го порядку по елементах першого ($i = 1$) рядка має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

<u>Приклад 1</u>. Обчислити визначник 3-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Розв’язання</u>. Згідно формул (1), (2) визначник 3-го порядку обчислимо так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 5) - (1 \cdot 2 - 3 \cdot 5) - (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 2(4-5) - (2-15) - (1-6) =$$

$$= 2 \cdot (-1) - (-13) - (-5) = -2 + 13 + 5 = 16.$$

Невиродженою називають квадратну матрицю, визначник якої відмінний від нуля.

Одиничною називають квадратну матрицю, у якої по головній діагоналі знаходяться одиниці, а решта елементів дорівнюють нулю.

Оберненою до квадратної матриці A називають матрицю A^{-1}, для якої виконується умова $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця. Для того, щоб для квадратної матриці існувала обернена матриця, необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою, тобто $\Delta A \neq 0$.

Так, для невиродженої матриці A обернену до неї матрицю A^{-1} можемо записати у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Рангом матриці називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r = r(A)$.

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (4)$$

де a_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$ – коефіцієнти при невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, b_k $(k = \overline{1,m})$ – вільні члени.

Для того, щоб система лінійних рівнянь (4) була сумісною (тобто, мала розв'язок), необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи $r\left(A\right)$ дорівнював рангу її розширеної матриці $r\left(B\right)$, де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ..... & ..... & ... & ..... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Якщо система лінійних рівнянь (4) сумісна, то вона має один або безліч розв'язків.

Розглянемо методи розв'язування лінійних рівнянь за допомогою визначників та матриць.

<u>**Правило Крамера.**</u>

Це правило можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають. Для простоти викладу розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими ($n=m=3$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \qquad (5)$$

Позначимо визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ називають визначником системи і його складають з коефіцієнтів при невідомих, а у визначниках $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ коефіцієнти при відповідних невідомих замінені вільними членами.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (5) має єдиний розв'язок. Невідомі визначають за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \tag{6}$$

і такий спосіб визначення невідомих називають правилом Крамера.

Якщо $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, то система (5) має безліч розв'язків, а правило Крамера застосувати не можна.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників Δx_i, $i = 1, 2, 3$, відмінний від нуля, то система (5) несумісна.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо і обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8+2) - (4+8) + 3(1+8) = 3\cdot(-6) - 12 + 27 = -18 - 12 + 27 = -3;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-8+2) - (4+2) + 3(1+2) = -6 - 6 + 9 = -3;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(4+2) - (4+8) + 3(1-4) = 18 - 12 - 9 = -3;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2-1) - (1-4) + (1+8) = -9+3+9 = 3.$$

Підставимо одержані результати у формули (6). Маємо

$$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_3 = \frac{3}{-3} = -1.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

Матричний спосіб.

Матричний спосіб можна застосувати, якщо кількість рівнянь і кількість невідомих співпадають, а крім того, матриця системи має обернену.

Запишемо систему (5) у матричному вигляді. Для цього введемо матриці виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Користуючись правилом множення матриць, систему (5) запишемо у матричному вигляді

$$A \cdot X = B. \qquad (7)$$

Розв’язок цього рівняння має вигляд

$$X = A^{-1} \cdot B, \qquad (8)$$

де A^{-1} є оберненою матрицею до матриці A.

Приклад 3. Розв’язати систему лінійних рівнянь попереднього прикладу матричним способом.

Розв’язання. Перепишемо задану систему у вигляді (7). Для цього складемо матриці виду

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи будемо шукати у вигляді (8). Необхідно знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A. Обернена матриця існує, бо $\Delta A = -3 \neq 0$ (див. приклад 2). Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8+2 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(4+8) = -12,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1+8 = 9, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12-12 = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2+6 = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-6-3) = 9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6-1 = -7.$$

Складемо обернену матрицю згідно формули (3). Одержимо

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Помножимо обернену матрицю на матрицю B і одержимо шукану матрицю X. Маємо

$$X = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -12 & 0 & 9 \\ 9 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6-1+4 \\ -12+0+9 \\ 9+1-7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$

Метод Гаусса.

Для розв'язування систем лінійних рівнянь застосовують метод, який називають методом Гаусса або методом виключення змінних. Суть методу Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь розглянемо за допомогою матриць. Його ідея полягає у зведенні розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень матриці до трикутної матриці.

Трикутною називають матрицю, у якої під головною діагоналлю всі елементи рівні нулю.

Елементарними перетвореннями матриці є такі перетворення:

1) перестановка двох рядків матриці;
2) множення всіх елементів рядка на одне і те ж число, відмінне від нуля;
3) додавання елементів якого-небудь рядка матриці, помножених на одне і те ж число, до відповідних елементів іншого рядка;
4) відкидання рядків матриці, елементами яких є нулі.

Проводячи елементарні перетворення над матрицею системи, отримують нову систему рівнянь, яка еквівалентна заданій, але з новими коефіцієнтами та вільними членами. Одержують трикутну систему рівнянь, із якої визначають невідомі.

Приклад 4. Методом Гаусса розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв’язання. Складемо розширену матрицю системи і будемо робити над нею необхідні елементарні перетворення, щоб одержати трикутну матрицю. На початку переставимо перше і третє рівняння місцями, а потім помножимо елементи першого рядка відповідно на мінус три, мінус два та мінус два і одержані результати додамо відповідно до елементів другого, третього та четвертого рядків. Аналогічно вчинимо з елементами другого, а потім третього рядків. Одержимо матрицю

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -10 & -10 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&10&10\\0&0&-5&-5\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&10&10\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&10&10\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&4\\0&1&10&10\\0&0&1&1\end{array}\right).$$

Система лінійних рівнянь матиме вигляд

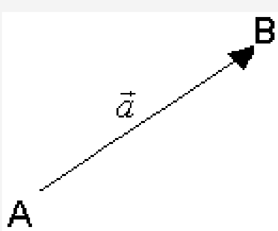
$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=4,\\ \qquad x_2+10x_3=10,\\ \qquad\qquad x_3=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4-x_2-3x_3=1,\\ x_2=10-10x_3=0,\\ x_3=1.\end{cases}$$

З третього рівняння $x_3=1$. З другого рівняння одержали x_2, а з першого одержуємо x_1.

Відповідь: $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=1.$

1. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії

Вектором називають напрямлений відрізок простору. Вектор позначають $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$, де A – початкова точка вектора, а B – кінцева.



Якщо точки A та B задані своїми координатами $A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2)$, то проекції вектора на відповідні осі координат будуть дорівнювати різниці відповідних координат: $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$.

Ортами (одиничними векторами) називають три взаємно-перпендикулярних вектори, довжини яких дорівнюють одиниці, їх позначають через $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ $\left(|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1,\ \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}\right)$. Тоді вектори $\overrightarrow{AB},\vec{a}$ можна записати через проекції (координати) у вигляді

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}, \qquad (9)$$

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}. \qquad (10)$$

Довжину (модуль) вектора можна знайти за формулами:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}, \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (11)$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi, \qquad (12)$$

або

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \qquad (13)$$

якщо вектори задані координатами $\vec{a} = \left\{x_1, y_1, z_1\right\}$ і $\vec{b} = \left\{x_2, y_2, z_2\right\}$. З формули (12), з урахуванням формул (11) і (13) випливає, що косинус кута між двома векторами можна обчислити так:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} . \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (14)$$

Векторним добутком двох векторів називають третій вектор, який задовольняє умовам:

1) довжина вектора чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на заданих векторах;

2) вектор перпендикулярний до площини векторів-множників;

3) вектор направлений в той бік, що якщо дивитися з його кінця, то рух від першого вектора-множника до другого буде здійснюватися проти годинникової стрілки.

Векторний добуток позначають у вигляді $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, або

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані координатами.

Рівняння прямої, що проходить через точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ і $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ простору можна записати за формулою

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (16)$$

Задача 1. Дано координати вершин піраміди $A(0;0;2)$, $B(2;2;1)$, $C(-2;1;0)$ та $D(-1;2;0)$. Знайти:

1) довжину ребра AB;

2) написати рівняння ребра AB;

3) обчислити кут між ребрами AB і AC;

4) обчислити площу основи ABC;

5) зробити схематичний малюнок піраміди.

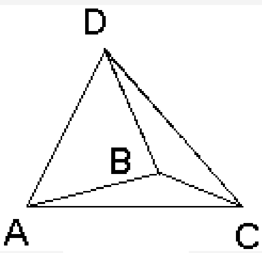


Рис. 1

Розв'язання. Зробимо схематичний малюнок піраміди (Рис. 1).

1) Знайдемо довжину ребра AB за формулою (11). Одержимо

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{4+4+1}=3.$$

2) За формулою (16) напишемо рівняння ребра AB:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{2-0}=\frac{z-2}{1-2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

3) Для обчислення косинуса кута між ребрами AB і AC знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{AB}=\{2-0;2-0;1-2\}=\{2;2;-1\}$ і $\overrightarrow{AC}=\{-2-0;1-0;0-2\}=\{-2;1;-2\}$.

Тоді в силу формули (14) одержимо

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot(-2)+2\cdot1-1\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{-4+2+2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\frac{0}{9}=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

4) Площа основи ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, який побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Тобто $S_\Delta=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ обчислимо за формулою (15). Тоді

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\left(-4+1\right)+\vec{j}\left(-4-2\right)+\vec{k}\left(2+4\right)=-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k};$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|-3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}\right|=\sqrt{\left(-3\right)^2+6^2+6^2}=\sqrt{81}=9;$$

$$S_{\Delta}=\tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\tfrac{1}{2}\cdot 9=\tfrac{9}{2}=4{,}5\ \left(\text{кв.одиниць}\right).$$

2. Криві другого порядку

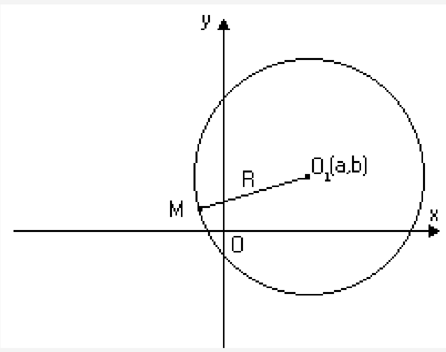


Рис. 2

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від однієї точки $O_1\left(a;b\right)$, яка називається центром. Канонічне рівняння кола має вигляд

$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2 \text{ або } x^2+y^2=R^2, \quad (17)$$

коли центр кола співпадає з початком координат. R – радіус кола (Рис. 2).

Еліпсом називається множина всіх точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок, які називаються фокусами, є величина стала (Рис. 3). Канонічне рівняння еліпса має вигляд

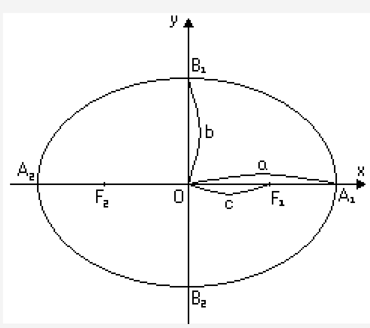


Рис. 3

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ де } b^2=a^2-c^2. \quad (18)$$

Величини a і b – півосі еліпса, а фокуси мають такі координати: $F_1\left(c;0\right)$, $F_2\left(-c;0\right)$. Відношення $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ характеризує форму еліпса і називається його **ексцентриситетом**.

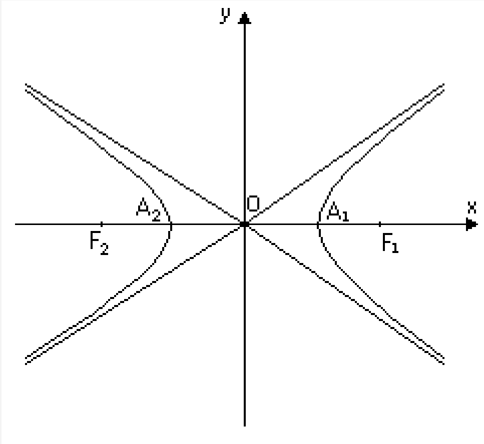


Рис. 4

<u>Гіперболою</u> називається множина всіх точок площини, для яких модуль різниці відстаней кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала (Рис. 4). Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ де } b^2=c^2-a^2. \qquad (19)$$

Прямі лінії $y=\pm\frac{b}{a}x$ називаються асимптотами гіперболи. Гілки гіперболи наближаються до даних асимптот.

<u>Параболою</u> називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від однієї точки F, яка називається фокусом, і даної прямої, яка називається директрисою (Рис. 5). Канонічне рівняння параболи має вигляд

$$y^2=2px, \qquad (20)$$

де величина p називається параметром параболи.

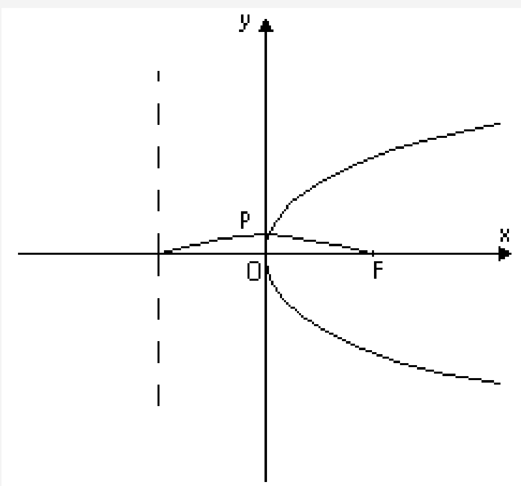


Рис. 5

<u>Зауваження</u>. Якщо фокальна вісь параболи буде співпадати з віссю Oy, то рівняння параболи має вигляд

$$x^2=2py. \qquad (21)$$

<u>Приклад 5</u>. 1) Знайти координати центра і величину радіуса кола $x^2+y^2+2x-10y+1=0$.

2) Для гіперболи $16x^2-9y^2=144$ знайти величини півосей, координати фокусів, ексцентриситет та написати рівняння її асимптот.

<u>Розв'язання</u>. 1) Запишемо рівняння кола у канонічному вигляді (17), виділяючи повні квадрати відносно кожної змінної величини. Одержимо

$$\left(x^2+2x+1\right)-1+\left(y^2-10y+25\right)-25+1=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x+1\right)^2+\left(y-5\right)^2=25.$$

Центр кола лежить в точці $O_1\left(-1;5\right)$, а радіус $R=5$.

2) Якщо поділимо почленно рівняння гіперболи на 144, то одержимо канонічне рівняння вигляду (19):

$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1, \text{ де } a=3,\ b=4.$$

Значення c знайдемо з рівняння $b^2=c^2-a^2$. Тут

$$c^2=a^2+b^2=9+16=25, \quad c=5.$$

Фокуси мають координати: $F_1\left(5;0\right)$ і $F_2\left(-5;0\right)$, а ексцентриситет

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3},\ \varepsilon=\frac{5}{3}.$$

Рівняння асимптот відповідно є $y=\pm\frac{b}{a}x,\ \ y=\pm\frac{4}{3}x$.

3. Границя функції

Розглянемо деякі основні поняття функції однієї змінної, яку будемо позначати аналітично $y=f\left(x\right)$.

Одним із найважливіших понять математичного аналізу є поняття границі функції.

Границею функції $y=f\left(x\right)$ при $x\to+\infty$ називають число b, якщо яке б не було додатне число ε, можна знайти такий номер N, що для всіх x, більших N, виконується нерівність $\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon$.

Границю функції записують у вигляді

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=b.$$

Границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ називають число b, якщо для довільного додатного ε знайдеться таке $\delta > 0$, що якщо виконується нерівність $|x - x_0| < \delta$, то матиме місце також нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

У цьому випадку границю функції записують у такому вигляді:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Нескінченно малою називають функцію, границя якої дорівнює нулю.

Нескінченно великою називають функцію $y = f(x)$, якщо починаючи з деякого номера N значення функції для всіх $x > N$ стає більшим за будь-яке велике значення C, тобто $f(x) > C$ при $x > N$.

Оберненою функцією до нескінченно малої є нескінченно велика функція і навпаки. Символічно це твердження (не строго математично) можемо записати так:

$$\frac{1}{0} = \infty, \ \frac{1}{\infty} = 0.$$

Основними властивостями границі функції є такі властивості:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}, \quad \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0.$

При обчисленні границі функції під знак границі підставляють значення x_0 ($x \to x_0$) замість x.

Приклад 6. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \to 3} \left(5 - \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \right).$$

Розв'язання. Замість x підставимо число 3 під знаком границі. Одержимо

$$\lim_{x\to 3}\left(5-\frac{x^2-2x+5}{x+1}\right)=5-\frac{3^2-2\cdot 3+5}{3+1}=5-\frac{8}{4}=5-2=3.$$

Приклад 7. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2}.$$

Розв'язання. Підставимо число 2 замість x і одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2}=\frac{4-8+4}{4+2}=\frac{0}{6}=0.$$

Приклад 8. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}.$$

Розв'язання. Підставимо число 1 замість x і одержимо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}=\frac{1+3-1}{1-1}=\frac{3}{0}.$$

В силу четвертої властивості границю функції не обчислюють. Але будемо виходити із визначення нескінченно малої та великої функцій і зв'язку між ними. Тоді вираз $\frac{1}{0}$ позначили "∞". Це знак границі нескінченно великої функції. Тобто:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}=\frac{3}{0}=3\cdot\frac{1}{0}=3\cdot\infty=\infty.$$

Часто при обчисленні границь виникають невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$; $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$; $\{\infty-\infty\}$; $\{0\cdot\infty\}$; $\{1^\infty\}$; $\{0^0\}$; $\{\infty^0\}$. Для того щоб розкрити ці невизначеності, необхідно зробити деякі алгебраїчні перетворення виразів, які є під знаком границі, або ж застосувати так звані "визначні" границі. Основними з них є такі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ – перша "визначна" границя;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$, $\quad \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ – другі “визначні” границі, а число $e\approx 2{,}72$ і називається сталою Ейлера.

<u>Приклад 9</u>. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}.$$

<u>Розв’язання</u>.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}=\frac{2+6-2\cdot 4}{4-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для розкриття невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ розкладемо на множники чисельник і знаменник виразу, а потім скоротимо на вираз $(x-2)$. Одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x}=\frac{-2\left(2+\frac{1}{2}\right)}{2}=-\frac{5}{2}.$$

<u>Приклад 10</u>. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}.$$

<u>Розв’язання</u>. Після підстановки $x=-2$ одержимо невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7+2}-\sqrt{11-2}}{4-4}=\frac{3-3}{0}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для того, щоб вираз, який знаходиться під знаком границі, скоротити на $(x+2)$, домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжене чисельника. Одержимо:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(x^2+2x\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{7-x-11-x}{x\left(x+2\right)\left(\sqrt{7+2}+\sqrt{11-2}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x\left(x+2\right)\cdot\left(3+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-2\left(x+2\right)}{6x\left(x+2\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{-2}{6x}=\frac{-2}{6\cdot\left(-2\right)}=\frac{1}{6}.$$

<u>**Еквівалентними**</u> називаються дві нескінченно малі функції, границя відношення яких при $x\to x_0$ дорівнює одиниці. Еквівалентність функцій позначають знаком "~", тобто $f\left(x\right)\sim\varphi\left(x\right)$. В силу першої "визначної" границі можна записати $\sin\alpha\sim\alpha$. Еквівалентними при $\alpha\to 0$ будуть також функції: $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$, $\arcsin\alpha\sim\alpha$, $\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$ та інші.

<u>Приклад 11</u>. Знайти границю виразу

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos 8x}.$$

<u>Розв'язання</u>.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos 8x}=\frac{0\cdot\operatorname{tg}0}{1-\cos 0}=\frac{0}{1-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

У даному випадку для розкриття невизначеності слід використати першу "визначну" границю, або еквівалентність функцій:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos 8x}=\left|\begin{array}{l}1-\cos 8x=\\ =2\sin^2 4x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{2\sin^2 4x}=\left|\ \operatorname{tg}6x\sim 6x,\ \sin 4x\sim 4x\ \right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 6x}{2\cdot\left(4x\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{2\cdot 16x^2}=\frac{6}{2\cdot 16}=\frac{3}{16}.$$

<u>Приклад 12</u>. Обчислити границю виразу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^3-5}{4+x-3x^4}.$$

Розв’язання. У цьому випадку одержуємо невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{-\infty}\right\}$.

Звертаємо увагу тільки на найвищий степінь x (x^4). Розділимо вираз почленно на найвищий степінь x і перейдемо до обчислення нескінченно малих функцій. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^3-5}{4+x-3x^4}=\left\{\frac{\infty}{-\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{2x^3}{x^4}-\frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^4}+\frac{x}{x^4}-\frac{3x^4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^3}-3}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0; & \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}=0;\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^4}=0; & \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0\end{matrix}\right|=\frac{1+0-0}{0+0-3}=-\frac{1}{3}.$$

4. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Другим важливим поняттям математичного аналізу є поняття похідної функції.

Похідною функції $y=f\left(x\right)$, неперервної в точці x_1, називають границю відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли $\Delta x\to 0$, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=y'_x=f'\left(x\right)=\frac{dy}{dx},$$

де $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y=f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)$.

Геометричним змістом похідної є: значення похідної в точці рівне значенню кутового коефіцієнта, який утворюється між дотичною і віссю OX, коли дотична проведена до графіка функції $y=f\left(x\right)$ в заданій точці.

Якщо функція має похідну, то вона називається диференційованою.

Основні правила диференціювання:

1) $\left(u\pm v\right)'=u'\pm v'$;

2) $\left(u\cdot v\right)'=u'v+v'u$;

3) $\left(cu\right)'=cu'$;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Якщо функція $y = f(x)$, а $x = \varphi(y)$ є оберненою функцією до неї, то

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \qquad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Якщо функція $u = u(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складена функція $y = f(u(x))$ в даній точці x має похідну y'_x, яка обчислюється за формулою $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Таблиця похідних:

1. $(c)' = 0$;
2. $(x)' = 1$;
3. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$;
4. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;
5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
6. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;
7. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
10. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
11. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
12. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
13. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
14. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
15. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
16. $(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$.

Приклад 13. Знайти похідну функції

$$y = \sqrt[7]{x^6 + 5x^2 - 1} + \sqrt[3]{(3x^2 + 2)^4}.$$

Розв’язання. Перепишемо функцію у такому вигляді:

$$y = (x^6 + 5x^2 - 1)^{\frac{1}{7}} + (3x^2 + 2)^{\frac{4}{3}}.$$

В силу формули 3 з таблиці похідних та правила диференціювання суми можемо записати

$$y'=\tfrac{1}{7}\left(x^6+5x^2-1\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(x^6+5x^2-1\right)'+\tfrac{4}{3}\left(3x^2+2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(3x^2+2\right)'=$$

$$=\tfrac{1}{7}\left(x^6+5x^2-1\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\left(6x^5+10x\right)+\tfrac{4}{3}\left(3x^2+2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 6x=$$

$$=\frac{6x^5+10x}{7\cdot\sqrt[7]{\left(x^6+5x^2-1\right)^6}}+\frac{8x}{\sqrt[3]{3x^2+2}}.$$

Приклад 14. Знайти похідну функції

$$y=\operatorname{arctg}\left(x^3-2x\right)\cdot\ln\left(5x+1\right).$$

Розв’язання. При диференціюванні функції застосуємо правило диференціювання добутку двох функцій та формули 7 і 14 із таблиці похідних. Одержимо

$$y'=\frac{1}{1+\left(x^3-2x\right)^2}\cdot\left(x^3-2x\right)'\cdot\ln\left(5x+1\right)+\frac{1}{5x+1}\cdot\left(5x+1\right)'\cdot\operatorname{arctg}\left(x^3-2x\right)=$$

$$=\frac{3x^2-2}{1+\left(x^3-2x\right)^2}\cdot\ln\left(5x+1\right)+\frac{5}{5x+1}\cdot\operatorname{arctg}\left(x^3-2x\right).$$

Приклад 15. Знайти похідну функції

$$y=\frac{2+\operatorname{tg}3x}{2-\operatorname{ctg}4x}.$$

Розв’язання. Застосуємо правило диференціювання дробу та формули 10 і 11 з таблиці похідних. Одержимо

$$y' = \frac{\left(2+\operatorname{tg}3x\right)'\left(2-\operatorname{ctg}4x\right)-\left(2-\operatorname{ctg}4x\right)'\left(2+\operatorname{tg}3x\right)}{\left(2-\operatorname{ctg}4x\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3\cdot\left(2-\operatorname{ctg}4x\right)-\frac{1}{\sin^2 4x}\cdot 4\cdot\left(2+\operatorname{tg}3x\right)}{\left(2-\operatorname{ctg}4x\right)^2} =$$

$$= \frac{3\sin^2 4x\cdot\left(2-\operatorname{ctg}4x\right)-4\cos^2 3x\cdot\left(2+\operatorname{tg}3x\right)}{\left(2-\operatorname{ctg}4x\right)^2\cdot\cos^2 3x\cdot\sin^2 4x}.$$

<u>Приклад 16</u>. Знайти похідну функції

$$y = e^{\cos 3x-2}+10^{x^4-3}+\sin^4\frac{x}{4}-\cos^5 2x+7.$$

<u>Розв'язання</u>. Застосуємо правило диференціювання суми та необхідні формули з таблиці похідних. Одержуємо

$$y' = e^{\cos 3x-2}\cdot\left(-\sin 3x\right)\cdot 3+10^{x^4-3}\ln 10\cdot 4x^3+4\sin^3\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cdot\tfrac{1}{4}-$$

$$-5\cos^4 2x\left(-\sin 2x\right)\cdot 2 = -3e^{\cos 3x-2}\sin 3x+4x^3\cdot 10^{x^4-3}\ln 10+$$

$$+\sin^3\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+10\cos^4 2x\sin 2x.$$

<u>**Похідною 2-го порядку**</u> називають похідну від похідної $y' = f'\left(x\right)$, якщо вона існує і позначають

$$\left(y'\right)' = y'',\ \left(f'\left(x\right)\right)' = f''\left(x\right).$$

<u>**Похідною *n*-го порядку**</u> називають першу похідну від похідної $\left(n-1\right)$-го порядку і позначають

$$\left(y^{(n-1)}\right)' = y^{(n)},\ \left(f^{(n-1)}\left(x\right)\right)' = f^{(n)}\left(x\right). \qquad (22)$$

<u>Приклад 17</u>. Знайти похідну $y^{(IV)}$ від функції $y = \cos^2 3x$.

Розв'язання. З формули (22) випливає, що для знаходження похідної четвертого порядку необхідно знайти похідну третього порядку, похідна 3-го порядку знаходиться як похідна від похідної 2-го порядку, а похідна 2-го порядку знаходиться як похідна від похідної першого порядку. Будемо знаходити послідовно похідні 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядків. Маємо:

$$y' = 2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3 = -3\sin 6x; \qquad y'' = -3\cos 6x \cdot 6 = -18\cos 6x;$$

$$y''' = -18(-\sin 6x)\cdot 6 = 108\sin 6x; \qquad y^{(IV)} = 108\cos 6x \cdot 6 = 648\cos 6x.$$

5. Дослідження функцій за допомогою похідних

Похідна функції має широке застосування при розв'язуванні різних задач математики, фізики, техніки та економіки. Так, наприклад, за допомогою похідної можна обчислити границю функції, знайти екстремум функції, інтервали монотонності, точки перегину функції та інше.

Інтервалами монотонності функції називаються ті інтервали, на яких функція або тільки зростає, або тільки спадає або залишається сталою.

Якщо неперервна на сегменті $[a,b]$ функція $y = f(x)$ має в кожній точці цього сегмента додатну похідну, то вона зростає на цьому сегменті, а якщо від'ємну похідну, то вона спадає на цьому сегменті.

Функція $y = f(x)$ має **максимум** в точці $x = x_0$, якщо для довільних точок із її околу виконується умова $f(x_0) > f(x)$ і має **мінімум** в точці, якщо виконується така умова: $f(x_0) < f(x)$.

Максимум і мінімум функції називають **екстремуми** функції.

Необхідною умовою існування екстремуму в точці $x = x_0$ диференційовної функції $y = f(x)$ є рівність нулю її похідної: $f'(x_0) = 0$.

Критичними або стаціонарними точками неперервної функції $y = f(x)$ є ті точки, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує.

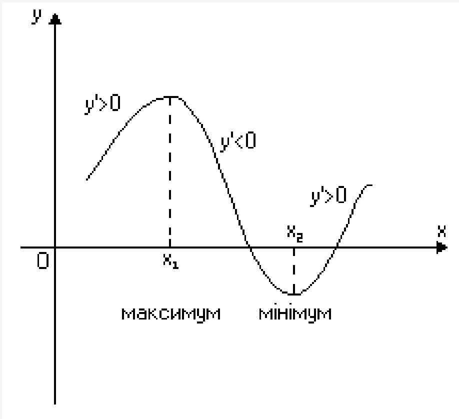


Рис. 6

Достатньою умовою існування екстремуму в точці $x = x_0$ для диференційованої функції $y = f(x)$ є зміна знака похідної при переході через цю точку. Так при зміні знака з “+” на “–” в точці $x = x_0$ функція має максимум, а з “–” на “+” – мінімум (Рис. 6).

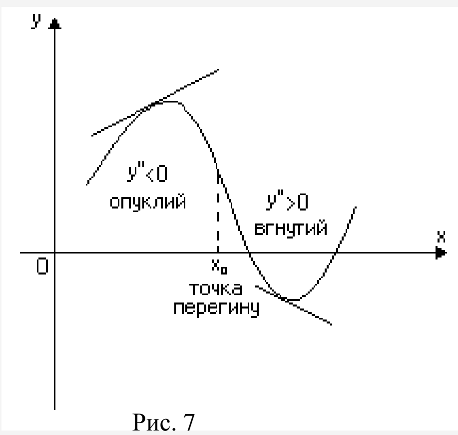


Рис. 7

Вгнутим називається графік диференційованої функції $y = f(x)$ в інтервалі (a,b), якщо він знаходиться вище довільної його дотичної на цьому інтервалі.

Опуклим називається графік диференційованої функції $y = f(x)$ в інтервалі (a,b), якщо він знаходиться нижче довільної його дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину неперервної функції називається та точка, яка відділяє вгнутість від опуклості її графіка (Рис. 7).

Якщо друга похідна функції $y = f(x)$ для всіх $x \in (a,b)$ від’ємна ($f''(x) < 0$), то тут графік функції опуклий, а якщо $f''(x) > 0$ – вгнутий.

Необхідною умовою існування точки перегину графіка функції є рівність нулю її другої похідної: $f''(x_0) = 0$ в даній точці $x = x_0$.

Точка $x = x_0$, в якій $f''(x_0) = 0$, називається **критичною точкою другого порядку** для функції $y = f(x)$.

Достатньою умовою існування точки перегину графіка неперервної функції є зміна знаку другої похідної при переході через точку x_0.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма лінія, до якої графік функції наближається на нескінченності.

Вертикальною асимптотою є пряма $x = a$, якщо виконується умова $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Для функції $y = f(x)$ вертикальні асимптоти існують в її точках розриву другого роду.

Похилу асимптоту шукають у вигляді $y = kx + b$, а параметри k і b шукають за формулами:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right). \qquad (23)$$

Якщо хоча б одна границя не існує, то похила асимптота відсутня.

При знаходженні границь (23) інколи зручно використовувати **правило Лопіталя**: якщо границя відношення двох функцій $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ є невизначеністю виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ або $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$, то її можна знаходити за формулою

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

якщо остання границя існує.

Приклад 18. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 + 3x^2 + 2$ на відрізку $[-3;1]$.

Розв’язання. Функція може досягати свого найбільшого та найменшого значення або на кінцях відрізка, або у критичних точках, якщо вони знаходяться у

середині відрізка. Знайдемо критичні точки функції і розглянемо тільки ті, які потрапляють в інтервал $(-3;1)$.

$y' = 3x^2 + 6x,\ y' = 0,\ 3x^2 + 6x = 0,\ 3x(x+2) = 0, \quad x_1 = 0,\ x_2 = -2$.

Обчислимо значення функції у критичних точках та на кінцях відрізка. Одержимо:

$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 2 = -27 + 27 + 2 = 2,\ f(-3) = 2$;

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 2 = -8 + 12 + 2 = 6,\ f(-2) = 6$;

$f(0) = 2$; $\quad f(1) = 1 + 3 + 2 = 6$.

Відповідь: $f(1) = f(-2) = 6$ – найбільше значення функції;

$f(-3) = f(0) = 2$ – найменше значення функції на відрізку.

Приклад 19. Провести повне дослідження функції $y = x^4 - 4x^3 + 3$ та побудувати її графік.

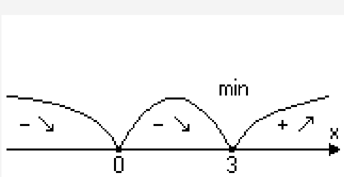
Розв'язання. 1) Знайдемо область визначення функції: $x \in (-\infty;+\infty)$.

2) У графіка цієї функції відсутні асимптоти. Якщо функція неперервна, то відсутні вертикальні асимптоти. При знаходженні похилих асимптот $y = kx + b$ параметр k не дорівнює скінченному числу:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + 3}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x^3 - 4x^2 + \frac{3}{x}\right) = \infty .$$

3) Знайдемо інтервали монотонності та критичні точки функції за допомогою першої похідної.

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3),\ y' = 0,\ 4x^2(x-3) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 3.$$



Одержані точки розбивають область визначення функції на такі інтервали: $(-\infty;0)$, $(0;3)$, $(3;+\infty)$. Знайдемо знак похідної в кожному з інтервалів.

$(-\infty;0)$, $y'(-1)=4(-1-3)=-16<0$, зростає;

$(0;3)$, $y'(1)=4(1-3)=-8<0$, зростає;

$(3;+\infty)$, $y'(4)=64(4-3)=64>0$, зростає.

$y_{\min}=f(3)=3^4-4\cdot 3^3+3=3^3(3-4)+3=-27+3=-24$,

$y_{\min}(3)=-24$.

4) Знайдемо інтервали вгнутості та точки перегину графіка функції за допомогою похідної другого порядку.

$y''=12x^2-24x=12x(x-2)$, $y''=0$, $12x(x-2)=0$, $x_1=0, x_2=2$.

Критичні точки другого порядку $x=0$, $x=2$ розбивають область визначення функції на інтервали вгнутості. Знайдемо знак другої похідної у кожному з них.

$(-\infty;0)$, $y''(-1)=-12(-1-2)=36>0$, вгнута;

$(0;2)$, $y''(1)=12(1-2)=-12<0$, опукла ;

$(2;+\infty)$, $y''(3)=36(3-2)=36>0$, вгнута.

$y_{m.n.}(0)=3$, $y_{m.n.}(2)=16-32+3=-13$.

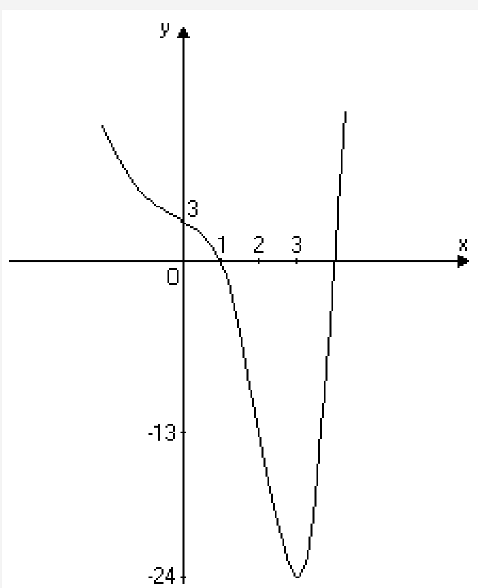


Рис. 8

Точки перегину функції мають координати: $(0;3)$ і $(2;-13)$.

5) Знайдемо точки перетину функції з осями координат: при $x=0$: $y=3$; при $y=0$: $x^4-4x^3+3=0$. Для рівняння $x^4-4x^3+3=0$ можна методом підбору знайти один корінь $x=1$.

6) Побудуємо схематично графік функції (рис. 8).

<u>Приклад 20</u>. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x}{x^2-25}$ та побудувати її графік.

Розв’язання. 1) Знайдемо область визначення функції. Необхідно знайти ті точки, в яких знаменник дробу дорівнює нулю і виключити їх. Одержимо $x^2-25\neq 0,\ x^2\neq 25,\ x_{1,2}\neq \pm 5$. Функція визначена в інтервалах $(-\infty;-5)\cup(-5;5)\cup(5;+\infty)$.

2) Знайдемо асимптоти графіка функції.

а) Вертикальні асимптоти будемо шукати в точках розриву функції. Одержимо

$$y=\lim_{x\to -5}\frac{x}{x^2-25}=\frac{-5}{25-25}=\frac{-5}{0}=\infty;$$

$$y=\lim_{x\to 5}\frac{x}{x^2-25}=\frac{5}{25-25}=\frac{5}{0}=\infty.$$

Прямі $x=-5$ та $x=5$ є вертикальними асимптотами функції.

б) Похилі асимптоти будемо шукати у вигляді $y=kx+b$, а невідомі параметри k і b визначимо за формулами (23). Одержимо

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(x^2-25\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-25}=\frac{1}{\infty}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-25}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-25}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{\left(x^2-25\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\infty}=0;$$

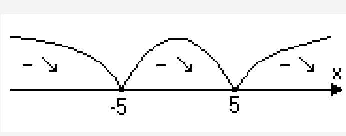
$k=0,\ b=0$, тоді $y=0$ – вісь OX – похила асимптота.

3) Знайдемо інтервали монотонності та критичні точки функції. Для цього знайдемо першу похідну функції. Маємо:

$$y'=\frac{x^2-25-2x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{-25-x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=-\frac{x^2+25}{\left(x^2-25\right)^2};$$

$$y'=0\ \Rightarrow\ x^2+25=0\ \Rightarrow\ x^2\neq -25,\ x^2+25>0.$$

Тоді $y'=-\dfrac{x^2+25}{\left(x^2-25\right)^2}<0$ для всіх x із області неперервності.



Тобто функція спадна на кожному інтервалі області визначення.

4) Знайдемо інтервали вгнутості та точки перегину графіка функції. Для цього знайдемо другу похідну.

$$y'' = \frac{-2x\left(x^2-25\right)^2 - 2\left(x^2-25\right)\cdot 2x\left(x^2+25\right)}{\left(x^2-25\right)^4} = \frac{-2x\left(x^2-25\right)\left(x^2-25-2\left(x^2+25\right)\right)}{\left(x^2-25\right)^4} =$$

$$= \frac{-2x\left(x^2-25-2x^2-50\right)}{\left(x^2-25\right)^2} = \frac{2x\left(x^2+75\right)}{\left(x^2-25\right)^3}.$$

Прирівняємо $y''=0$. Одержимо $2x\left(x^2+75\right)=0 \Rightarrow x=0,\ x^2 \neq -75;\quad x=0$ – критична точка.

Знайдемо знак другої похідної в кожному з інтервалів $(-\infty;-5);\ (-5;0);\ (0;5);\ (5;+\infty)$.

Маємо $y''(-6)<0;\ y''(-4)>0;\ y''(4)<0;\ y''(6)>0$.

На інтервалах $(-\infty;-5)$ та $(0;5)$ графік опуклий, а на інтервалах $(-5;0)$ та $(5;+\infty)$ – вгнутий. Точка $y(0)=0$ є точкою перегину графіка функції.

5) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: при $x=0,\ y=0$, при $y=0,\ x=0$. Інших точок не існує.

6) Використовуючи результати досліджень, побудуємо графік функції (Рис. 9).

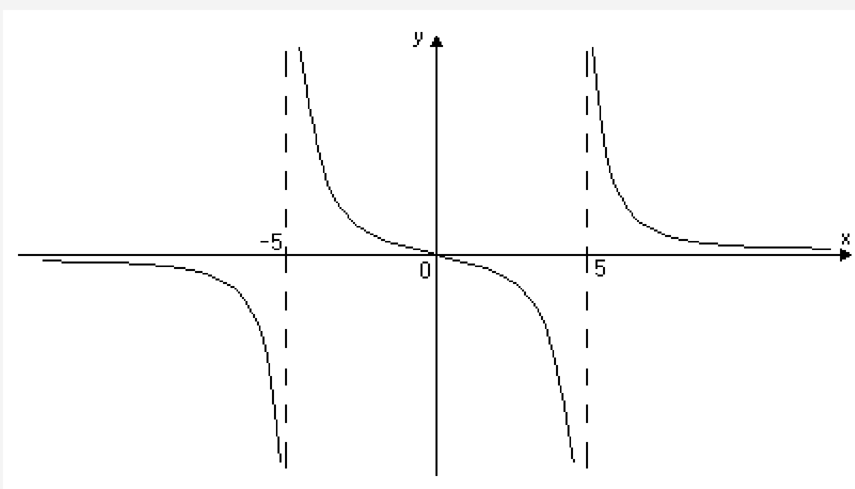


Рис. 9

<u>Зауваження</u>. Часто при побудові графіка функції знаходять парність функції. Тобто перевіряють умови: $y(-x)=y(x)$ – функція парна та $y(-x)=-y(x)$ –

функція непарна. Якщо жодна умова не виконується, то функція ні парна, ні непарна, а її графік загального положення.

Для функції $y = \frac{x}{x^2 - 25}$ виконується умова

$$y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 25} = \frac{-x}{x^2 - 25} = -\frac{x}{x^2 - 25} = -y(x).$$

Функція непарна, а її графік симетричний відносно початку координат.

7. Інтегральне числення

Невизначений інтеграл

В диференціальному численні розв'язували таку задачу: для заданої функції знайти її похідну. В інтегральному численні розв'язують обернену задачу: по заданій похідній відновити первісну функцію.

Невизначеним інтегралом для неперервної функції $f(x)$ називають множину всіх первісних функцій $F(x)$ і позначають

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$;

2) $\int (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$.

Таблиця основних інтегралів:

1. $\int dx = x + C$;

2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$;

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;

5. $\int e^u du = e^u + C$;

6. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$;

7. $\int \cos u\, du = \sin u + C$;

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;

10. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$;

11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

12. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C$;

13. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C$;

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;

16. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$;

17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

Приклад 21. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 + 12}{x^2 - 3} dx$.

Розв’язання. Виділимо цілу частину підінтегральної функції. Для цього поділимо чисельник на знаменник способом ділення многочлена на многочлен, або припишемо в чисельнику -3 та $+3$ і розглянемо суму дробів. Одержимо

$$\frac{x^2 - 3 + 3 + 12}{x^2 - 3} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3} + \frac{15}{x^2 - 3} = 1 + \frac{15}{x^2 - 3}.$$

$$\int \frac{x^2 + 12}{x^2 - 3} dx = \int\left(1 + \frac{15}{x^2 - 3}\right) dx = \int dx + 15\int \frac{dx}{x^2 - 3} = x + \frac{15}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}}\right| + C.$$

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int \frac{3x - 2}{\sqrt{5 - x^2}} dx$.

Розв'язання. Розглянемо різницю двох інтегралів і до кожного із них застосуємо відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-x^2}}dx = 3\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = I,$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} = \left| \begin{matrix} u = 5-x^2 \\ du = -2xdx \end{matrix} \right| = \frac{1}{-2}\int \frac{-2xdx}{\sqrt{5-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{5-x^2};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \left| \begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ a = \sqrt{5} \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}};$$

$$I = 3\left(-\sqrt{5-x^2}\right) - 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C = -3\sqrt{5-x^2} - 2\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Приклад 23. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+5x+9}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції і зможемо застосувати відповідну формулу із таблиці інтегралів. Одержимо

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+9} = \left| \begin{matrix} x^2+5x+9 = \\ = x^2+5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+9 = \\ = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4} \end{matrix} \right| = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x+\frac{5}{2} \\ du = dx \\ a = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}} + C.$$

Приклад 24. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}+5}$.

Розв’язання. Часто доводиться вводити заміну для спрощення обчислення інтегралу. Замінимо $\sqrt{x-3}$ на нову змінну. Одержимо

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-3}+5} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x-3}=t, & dx = 2t\,dt \\ x-3=t^2, & x=t^2+3 \end{matrix} \right| = \int \frac{\left(t^2+3\right)2t\,dt}{t+5} =$$

$$= 2\int \frac{t^3+3t}{t+5}dt = 2\int \left(t^2-5t+28-\frac{140}{t+5} \right) dt =$$

$$\begin{array}{r|l} -\;\; t^3+3t & t+5 \\ \cline{2-2} \underline{t^3+5t^2} & t^2-5t+28-\dfrac{140}{t+5} \\ -\;\; -5t^2+3t & \\ \underline{-5t^2-25t} & \\ -\;\; 28t & \\ \underline{28t+140} & \\ -140 & \end{array}$$

$$= 2\int t^2 dt - 10\int t\,dt + 56\int dt - 280\int \frac{dt}{t+5} =$$

$$= 2\frac{t^3}{3} - 10\frac{t^2}{2} + 56t - 280\ln\left|t+5\right| + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(x-3\right)^3} - 5\left(x-3\right) +$$

$$+56\sqrt{x-3} - 280\ln\left|\sqrt{x-3}+5\right| + C.$$

Приклад 25. Знайти інтеграл $\int x^2 \cos 2x\,dx$.

Розв’язання. Серед методів інтегрування важливим є метод інтегрування частинами. Формула інтегрування частинами має вид

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{24}$$

При інтегруванні цю формулу застосовують один чи декілька раз. Застосуємо формулу для знаходження інтеграла:

$$\int x^2\cos 2x\,dx=\left|\begin{matrix} u=x^2, & du=2x\,dx \\ dv=\cos 2x\,dx, & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\cdot 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\int x\sin 2x\,dx=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=\sin 2x\,dx, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\right)=\frac{x^2}{2}\sin 2x+$$

$$+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{x^2}{2}\sin 2x+\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

<u>Приклад 26</u>. Знайти інтеграл $\int x^2\ln(x+2)\,dx$.

<u>Розв’язання</u>. Для знаходження інтеграла застосуємо формулу (24). Одержимо

$$\int x^2\ln(x+2)\,dx=\left|\begin{matrix} u=\ln(x+2), & du=\dfrac{dx}{x+2}, \\ dv=x^2dx, & v=\dfrac{x^3}{3}\end{matrix}\right|=\frac{x^3}{3}\ln(x+2)-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x+2}=$$

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3 & x+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+2x^2} & x^2-2x+4-\dfrac{8}{x+2} \\ -\;-2x^2 & \\ \underline{-2x^2-4x} & \\ -\;4x & \\ \underline{4x+8} & \\ -8 & \end{array}$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x+2}dx=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{3}\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-$$

$$-\frac{1}{3}\int x^2\,dx+\frac{2}{3}\int x\,dx-\frac{4}{3}\int dx+\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x+$$

$$+\frac{8}{3}\ln|x+2|+C=\frac{x^3}{3}\ln|x+2|-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}-\frac{4x}{3}+\frac{8}{3}\ln|x+2|+C.$$

Приклад 27. Знайти інтеграл $\int\left(e^{-3x}+\operatorname{ctg}5x-\sqrt[3]{x}+2\right)dx$.

Розв’язання.

$$\int\left(e^{-3x}+\operatorname{ctg}5x-\sqrt[3]{x}+2\right)dx=\int e^{-3x}dx+\int\operatorname{ctg}5x\,dx-\int\sqrt[3]{x}\,dx+2\int dx=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{5\sin^2 5x}-\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+2x+C=-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{5\sin^2 5x}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+2x+C.$$

Визначений інтеграл

Для обчислення визначеного інтеграла застосовують формулу, яка зв’язує визначений інтеграл та первісну функцію. Ця формула має вигляд

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \tag{25}$$

де $F(x)$ – первісна функція, а a та b – межі (границі) інтегрування і її називають формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад 28. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{2x}dx$.

Розв’язання. При обчисленні визначеного інтеграла за формулою (25) необхідно знайти первісну функцію для функції e^{2x}. Одержимо

$$\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(e^{2\cdot1}-e^0\right)=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right).$$

Приклад 29. Обчислити інтеграл $\int_6^{11}\frac{dx}{\sqrt{x-2}+3}$.

Розв’язання. Для знаходження первісної в заданому інтегралі необхідно застосувати метод заміни змінної. Разом із заміною змінної поміняємо межі інтегрування. Одержимо

$$\int_6^{11}\frac{dx}{\sqrt{x-2}+3}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=t,\ x=t^2+2,\ при\ \ x=6:\ t_1=\sqrt{6-2}=2,\\ x-2=t^2,\ dx=2t\,dt,\ при\ \ x=11:\ t_2=\sqrt{11-2}=3\end{array}\right|=$$

$$=\int_2^3\frac{2t\,dt}{t+3}=2\int_2^3\frac{(t+3)-3}{t+3}dt=2\left(\int_2^3 dt-3\int_2^3\frac{dt}{t+3}\right)=2t\Big|_2^3-6\ln|t+3|\Big|_2^3=$$

$$=2(3-2)-6(\ln 6-\ln 5)=2-6\ln\frac{6}{5}.$$

Застосування визначених інтегралів

Площу криволінійної трапеції для неперервної на сегменті $[a,b]$ функції $y=f(x)>0$, згідно геометричного змісту інтеграла, обчислюють за формулою

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{27}$$

Площу криволінійного сектора в полярній системі координат обчислюють за формулою

$$S=\tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi, \tag{28}$$

де $\rho=\rho(\varphi)$ неперервна $\forall\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$.

Довжину дуги лінії на сегменті $[a,b]$ неперервної разом зі своєю похідною функції $y=f(x)$ обчислюють за формулою

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \tag{29}$$

або за формулою

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt, \tag{30}$$

якщо функція задана параметрично $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[t_1,t_2]$.

У випадку, коли крива задана полярним рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$, то

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (31)$$

Об'єм тіла обертання криволінійної трапеції з основою $[a,b]$ навколо осі Ox, яка обмежена неперервною функцією $y=f(x)$, обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (32)$$

Якщо криволінійна трапеція з основою $[c,d]$ обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла обертання обчислюють за формулою

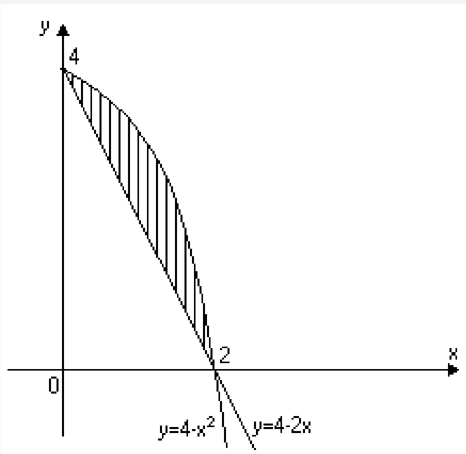
$$V=\pi\int_c^d(\varphi(y))^2\,dy=\pi\int_c^d x^2dy, \qquad (33)$$

де $x=\varphi(y)$ неперервна для всіх $y\in[c,d]$.

<u>Задача 2</u>. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y=4-x^2$ та $y=4-2x$.

<u>Розв'язання</u>. Зобразимо фігуру (рис. 10). Знайдемо точки перетину ліній. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=4-2x, \end{cases} \Rightarrow\ 4-x^2=4-2x\ \Rightarrow\ x^2-2x=0,\ x_1=0, x_2=2.$$



Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, площі яких обчислимо за формулою (27). Одержимо

$$S = S_2 - S_1 = \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx - \int_0^2 \left(4 - 2x\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(4 - x^2 - 4 + 2x\right) dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}\left(\text{кв.од.}\right)$$

<u>Задача 3</u>. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = 2 - \sin\varphi$.

<u>Розв'язання</u>. Побудуємо в полярних координатах лінію $\rho = 2 - \sin\varphi$ по точках (рис. 11).

φ	ρ
0	2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	2
$\frac{3}{2}\pi$	3
2π	2

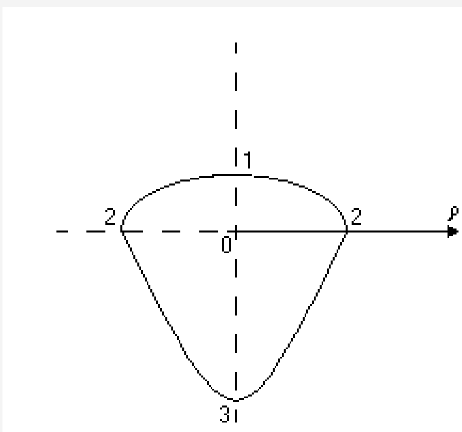


Рис. 11

Застосуємо формулу (28). Одержимо

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(2 - \sin\varphi\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin\varphi + \sin^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin\varphi + \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - 4\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} + 4\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} \cdot 2\pi + 4\cos 2\pi - \frac{1}{4}\sin 4\pi - 4\cos 0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(9\pi + 4 - 4\right) = \frac{9}{2}\pi\left(\text{кв.од.}\right)$$

<u>Задача 4</u>. Обчислити довжину дуги лінії $y = \sqrt{x^3}$, якщо $x \in [0,1]$.

<u>Розв'язання</u>. Згідно формули (29) необхідно знати похідну функції. Знайдемо $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Тоді

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}\right)^3}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right).$$

<u>Задача 5</u>. Обчислити довжину однієї арки циклоїди

$$x=a\left(t-\sin t\right),\;\; y=a\left(1-\cos t\right),\quad t\in\left[0,2\pi\right].$$

<u>Розв’язання</u>. Довжину дуги лінії обчислимо за формулою (30). Для цього знайдемо x_t' та y_t', а також $\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2$. Одержимо

$$x_t'=a\left(1-\cos t\right),\;\; y_t'=a\sin t,\;\; \left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=a^2\left(1-\cos t\right)^2+a^2\sin^2 t=$$
$$=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=a^2\left(2-2\cos t\right)=2a^2\left(1-\cos t\right)=$$
$$=2a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}=4a^2\sin^2\frac{t}{2};$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$
$$=-2a\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4a\left(\cos\pi-\cos 0\right)=-4a\left(-1-1\right)=8a.$$

<u>Задача 6</u>. Обчислити об’єми тіл обертання навколо осей Ox та Oy фігури, яка обмежена лініями $4y=x^2$ та $y=x$.

<u>Розв’язання</u>. Обчислимо об’єми тіл, які утворюються при обертанні фігури навколо осей. Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases}4y=x^2,\\ y=x,\end{cases}\Rightarrow\; 4x=x^2\;\Rightarrow\; x^2-4x=0,\; x\left(x-4\right)=0,\;\begin{matrix}x_1=0, & x_2=4\\ y_1=0, & y_2=4.\end{matrix}$$

Одержали дві точки з координатами $A\left(0;0\right)$ та $B\left(4;4\right)$. Зобразимо ці тіла схематично (рис. 12,13).

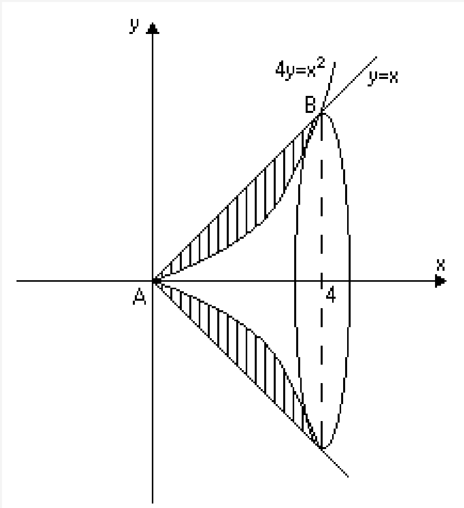


Рис. 12

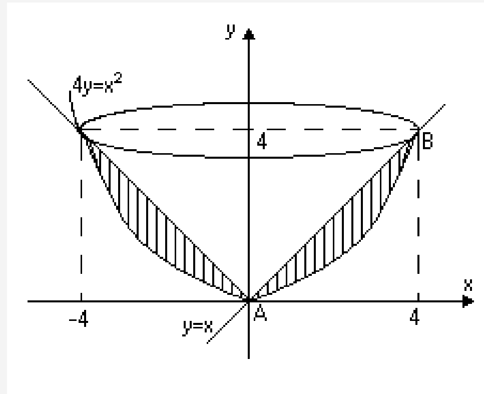


Рис. 13

1) Об'єм тіла обертання навколо осі Ox дорівнює різниці двох об'ємів тіл, які ми обчислимо за формулою (32). Одержимо

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^4 x^2dx - \pi\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \pi\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{16}\int_0^4 x^4dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}x^3\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^4 = \frac{\pi}{3}\cdot 64 - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{4^5}{5} = \frac{64\pi}{3} - \frac{64\pi}{5} =$$

$$= \frac{64\pi(5-3)}{15} = \frac{128}{15}\pi\ (\text{куб.од.})$$

2) Аналогічно обчислюємо об'єм тіла обертання навколо осі Oy, використавши формулу (33):

$$V = V_1 - V_2 = -\pi\int_0^4 y^2dy + \pi\int_0^4 4y\,dy = -\pi\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^4 + 4\pi\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^4 =$$

$$= 2\pi y^2\Bigg|_0^4 - \frac{\pi}{3}y^3\Bigg|_0^4 = 2\pi\cdot 16 - \frac{\pi}{3}\cdot 16 = \frac{6\pi\cdot 16 - 16\pi}{3} =$$

$$= \frac{16\pi(6-1)}{3} = \frac{80}{3}\pi(\text{куб.од.})$$